

# **TEMA 2:**

## **Componentes**

# Objetivos

- Conocer las definiciones y unidades de resistencia y conductancia
- Utilizar la Ley de Ohm para calcular corrientes y tensiones, y la Ley de Joule para calcular potencias y energías en una resistencia
- Establecer las propiedades que definen las conexiones en serie y paralelo de los componentes

# Objetivos

- Describir el comportamiento de las bobinas y condensadores mediante su ecuación característica
- Establecer las condiciones de continuidad para las bobinas y condensadores
- Calcular la potencia y energía cedidas o absorbidas en circuitos con bobinas o condensadores
- Aplicar las leyes de conservación del flujo y de la carga

# Objetivos

- **Calcular la bobina (el condensador) equivalente en circuitos con bobinas (condensadores) en serie y/o en paralelo**
- **Analizar un circuito con energía almacenada en condiciones de régimen permanente de continua**
- **Distinguir entre fuentes reales e ideales**
- **Identificar los símbolos y propiedades de las fuentes dependientes**

# Contenidos

## Resistencia y conductancia

- Ecuación característica: Ley de Ohm
- Potencia y energía: Ley de Joule
- Asociación de resistencias: serie y paralelo

# Contenidos

## La bobina

- Ecuación característica
- Potencia y energía
- Asociación de bobinas
- Ley de conservación del flujo
- La bobina real

# Contenidos

## El condensador

- Ecuación característica
- Potencia y energía
- Asociación de condensadores
- Ley de conservación de la carga
- El condensador real

# Contenidos

## Fuentes

- Fuentes ideales
- Fuentes dependientes
- Fuentes reales
- Asociación de fuentes

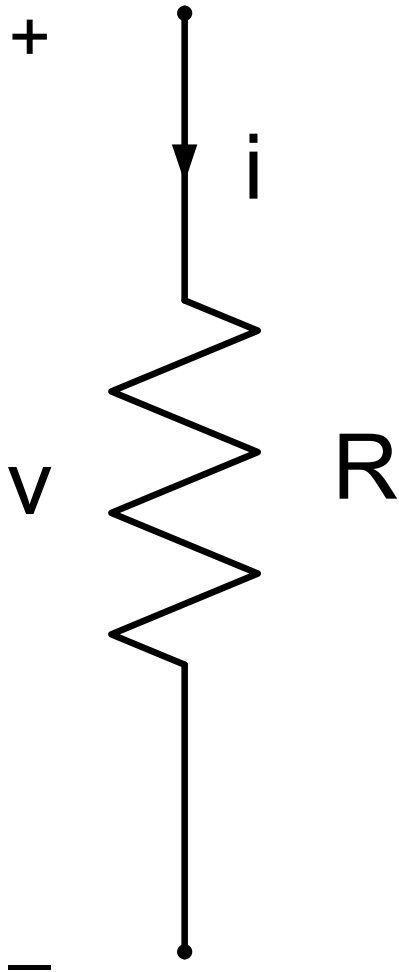


# Resistencia



**R : Ohmio [ $\Omega$ ]**

# Ley de Ohm



$$\mathbf{v = iR}$$

**v: tensión** [V]

**i: corriente** [A]

**R: resistencia** [ $\Omega$ ]

# Conductancia

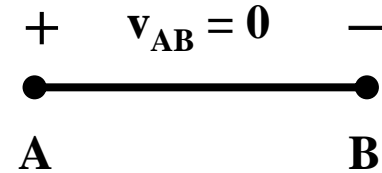
$$G = \frac{1}{R}$$

**G: conductancia    [S]    Siemen**

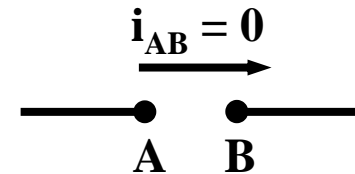
**R: resistencia    [ $\Omega$ ]    Ohmio**

# Casos límite

- $R_{AB} \approx 0$ ,  $G_{AB} \approx \infty$ , cortocircuito



- $R_{AB} \approx \infty$ ,  $G_{AB} \approx 0$ , circuito abierto



# Potencia en una resistencia. Ley de Joule

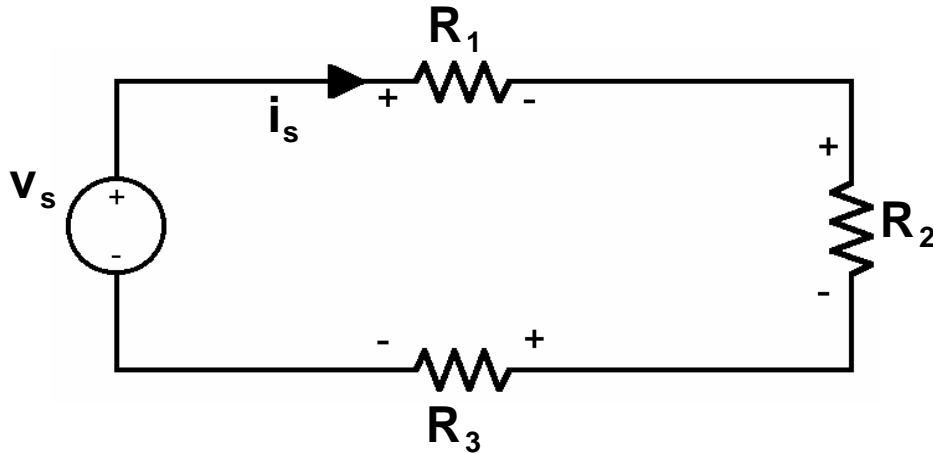
$$p = vi = iRi = i^2R$$

$$p = i^2R, \quad p = \frac{i^2}{G}$$

$$p = vi = v \frac{v}{R} = \frac{v^2}{R}$$

$$p = \frac{v^2}{R}, \quad p = v^2G$$

# Resistencias en serie



**Por los elementos en serie pasa la misma corriente**

**Ley de Kirchhoff de tensiones :**

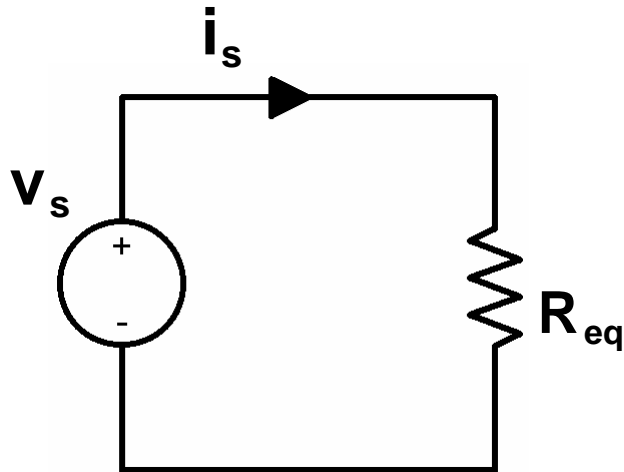
$$-v_s + i_s R_1 + i_s R_2 + i_s R_3 = 0$$

$$-v_s + i_s \underbrace{(R_1 + R_2 + R_3)}_{R_{eq}} = 0$$

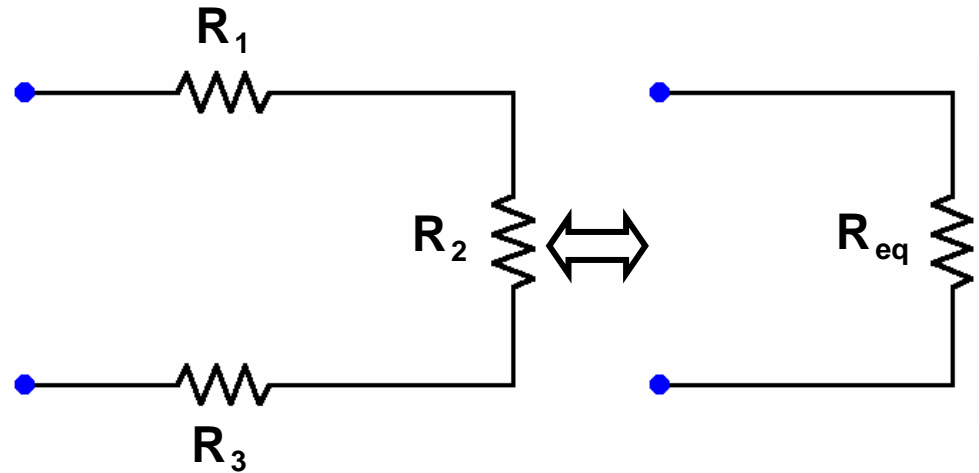
$$-v_s + i_s R_{eq} = 0$$

# Resistencias en serie

$$-V_s + i_s R_{eq} = 0$$

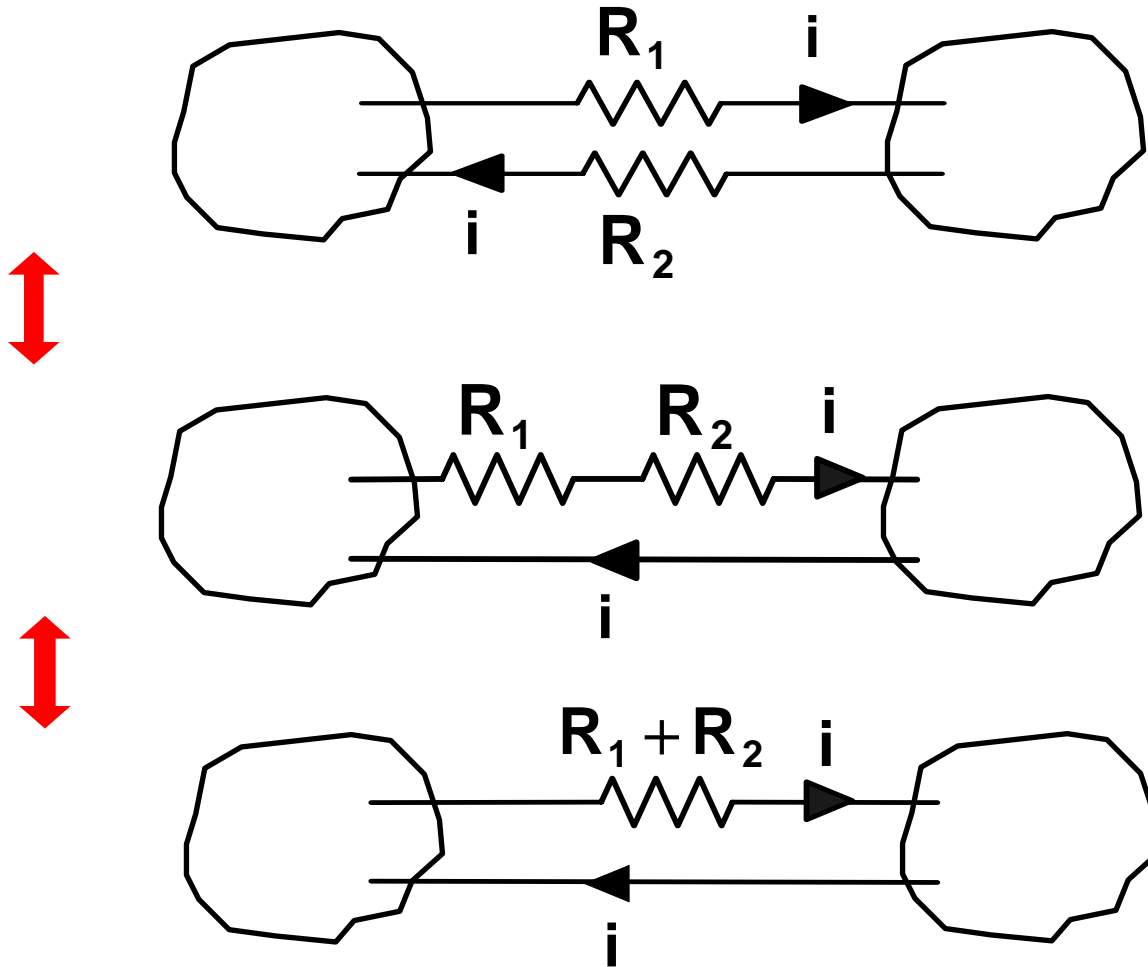


$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$



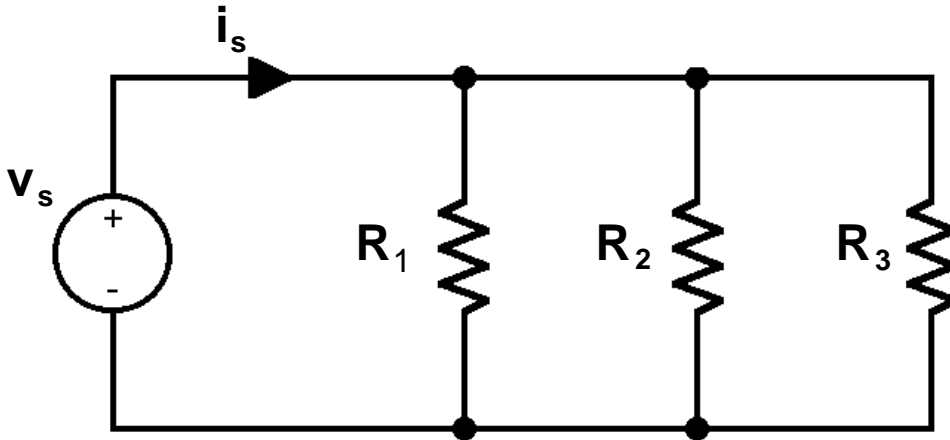
$$R_{eq} = \sum_{i=1}^k R_i$$

# Resistencias en serie





# Resistencias en paralelo



Los elementos en paralelo están a la misma tensión

## Ley de Kirchhoff de corrientes

$$i_s = \frac{V_s}{R_1} + \frac{V_s}{R_2} + \frac{V_s}{R_3}$$

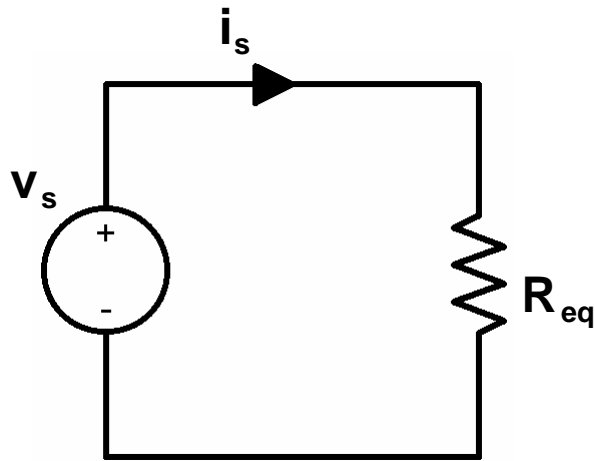
$$i_s = V_s \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

$$V_s = i_s \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}_{R_{eq}}}$$

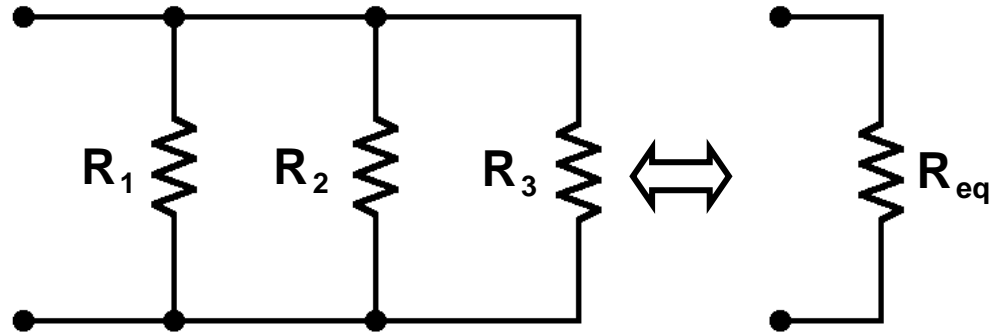
$$V_s = i_s R_{eq}$$

# Resistencias en paralelo

$$V_s - i_s R_{eq} = 0$$



$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$



$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{R_i}}$$

# Resistencias en paralelo

$$i_s = \frac{v_s}{R_1} + \frac{v_s}{R_2} + \frac{v_s}{R_3}$$

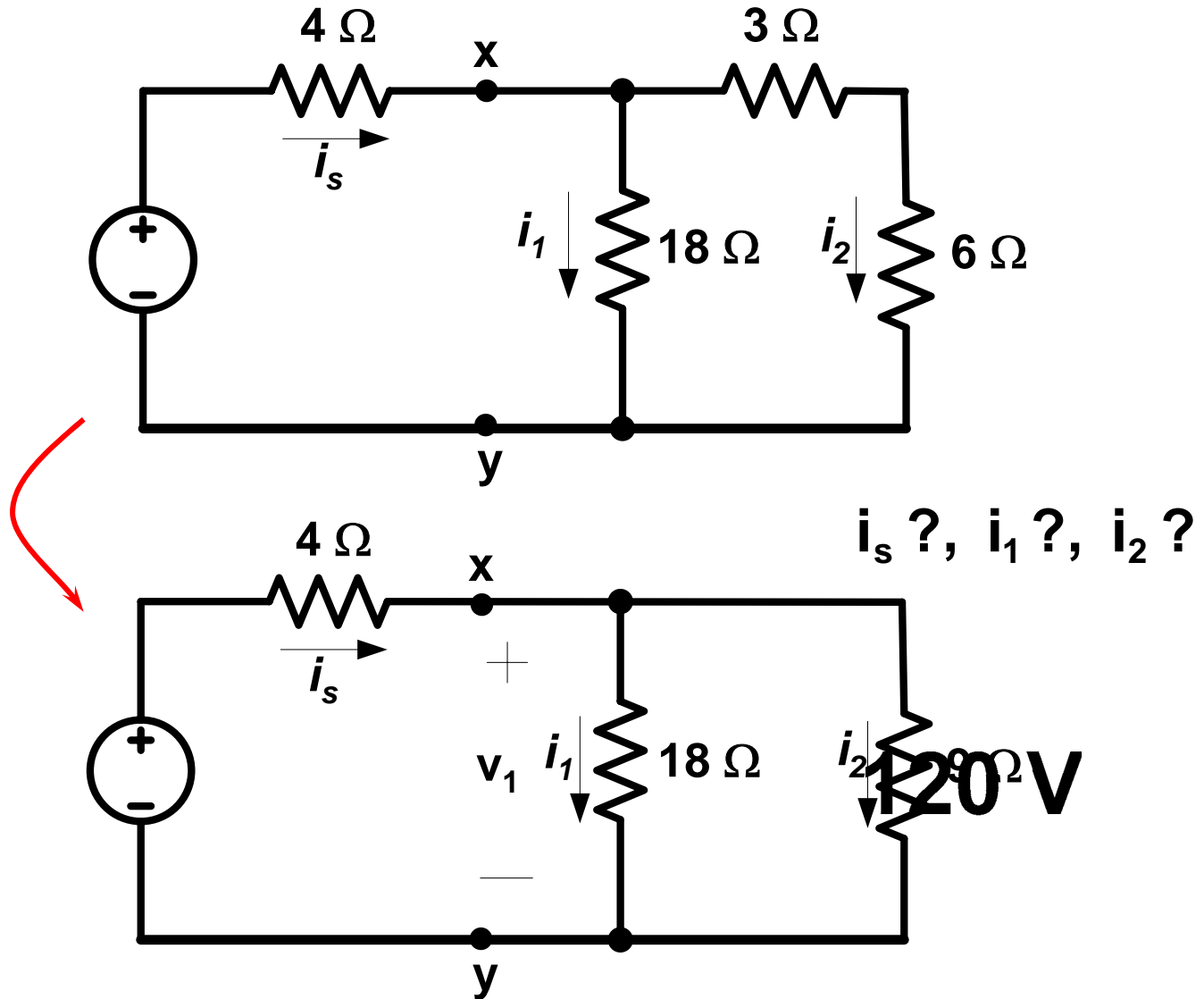
$$i_s = v_s G_1 + v_s G_2 + v_s G_3$$

$$i_s = v_s \underbrace{(G_1 + G_2 + G_3)}_{G_{eq}}$$

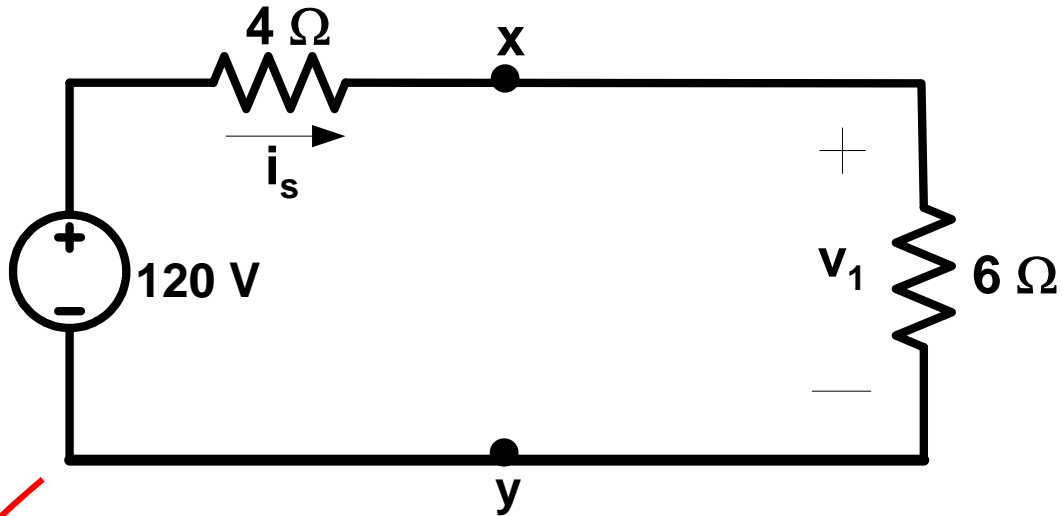
$$i_s = v_s G_{eq}, \text{ por tanto : } G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3$$

$$G_{eq} = \sum_{i=1}^k G_i$$

## Ejemplo 2.1

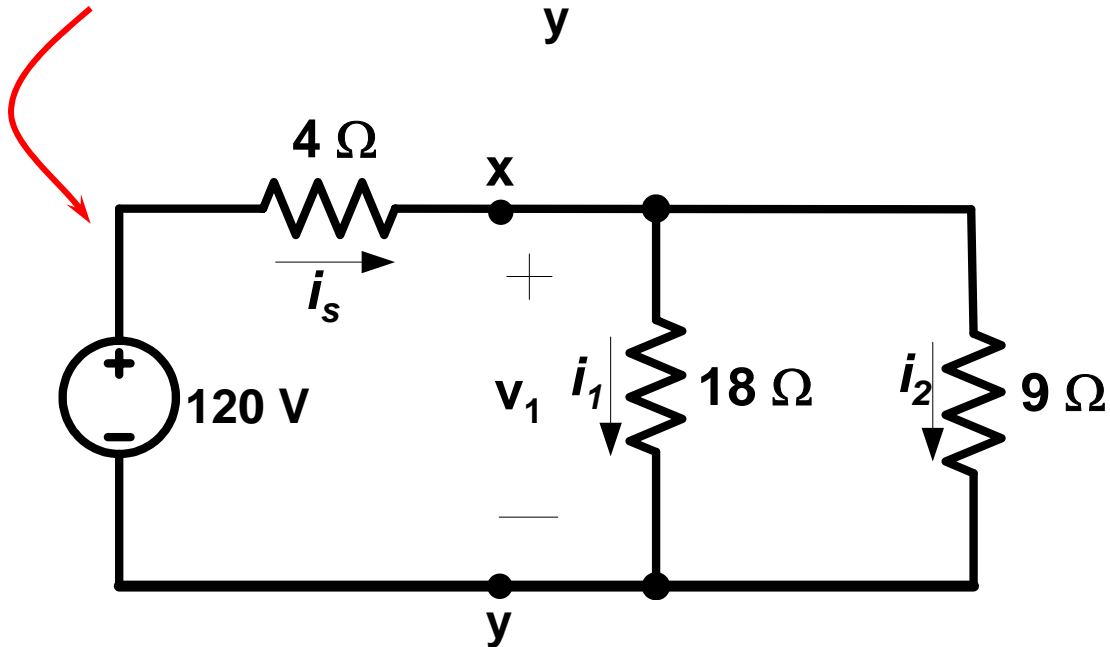


## Ejemplo 2.1 (I)



$$i_s = \frac{120}{10} = 12 \text{ A}$$

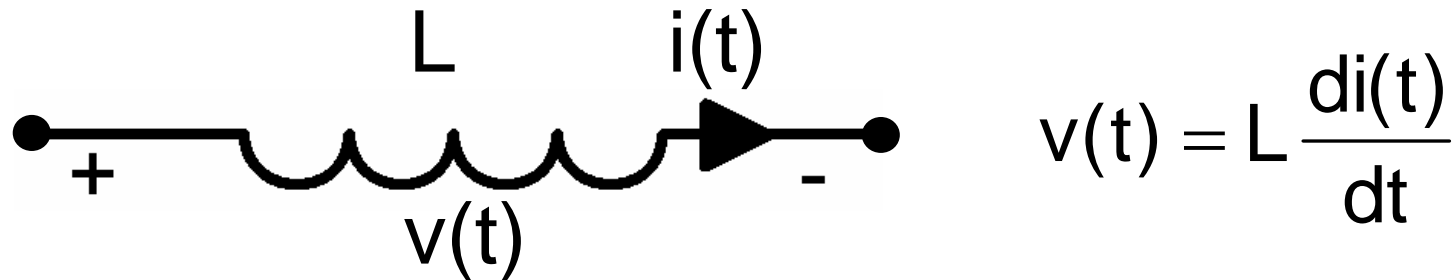
$$v_1 = 12 \times 6 = 72 \text{ V}$$



$$i_1 = \frac{v_1}{18} = 4 \text{ A}$$

$$i_2 = \frac{v_1}{9} = 8 \text{ A}$$

# La bobina



- $L$ : coeficiente de autoinducción, henrios [ $H = Vs/A$ ]
- Observaciones:
  - ♦  $i = \text{constante} \Rightarrow v = 0$ . La bobina se comporta como un cortocircuito frente a una corriente constante

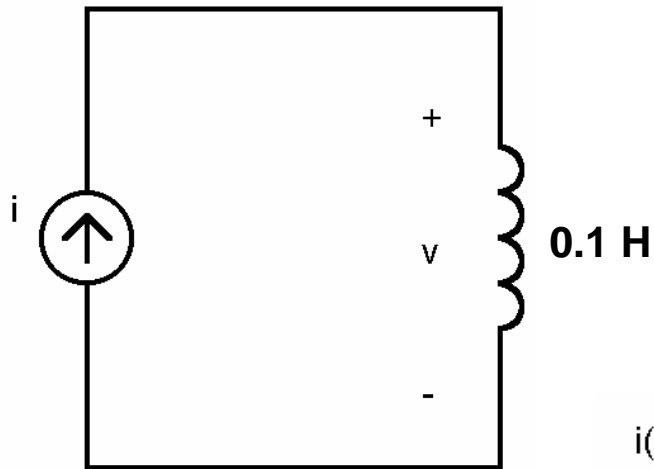
# La bobina

- ◆ La corriente no puede cambiar de valor instantáneamente. Se requeriría una tensión infinita

Cambio instantáneo:

$$\frac{di(t)}{dt} = \infty \quad \Rightarrow \quad v(t) = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{¡IMPOSIBLE!}$$

## Ejemplo 2.2

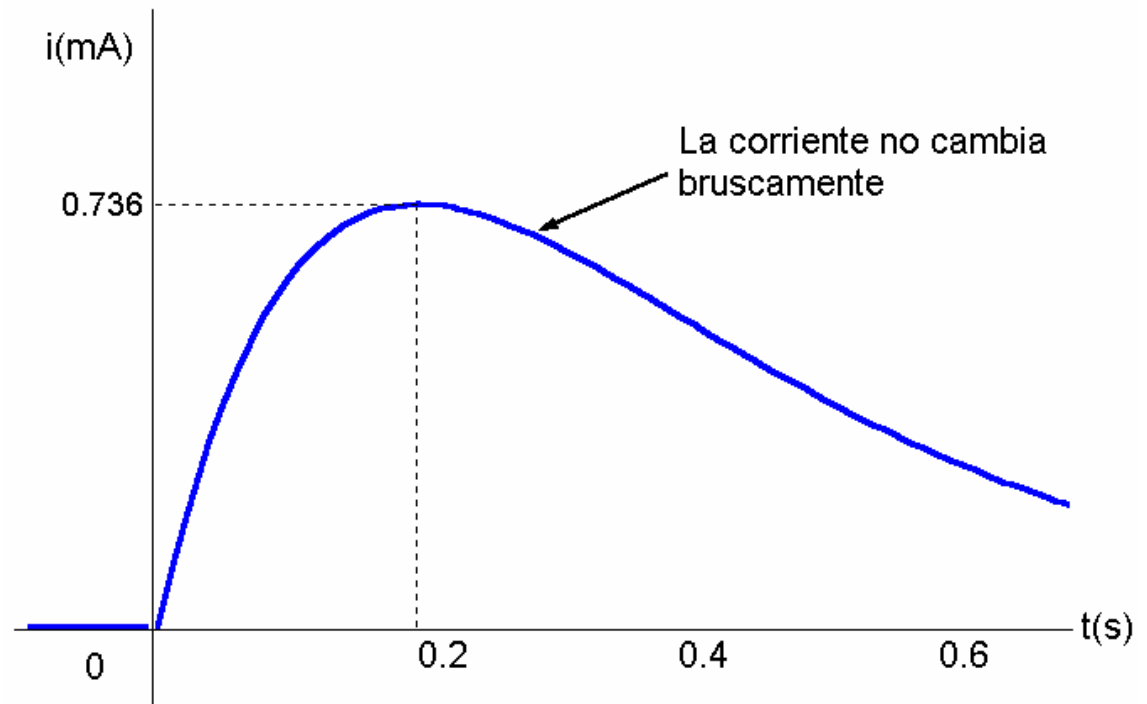


$$\begin{cases} i(t) = 0, & t < 0 \\ i(t) = 10 t e^{-5t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

¡MATLAB!

¡EXCEL!

¡PSPICE!

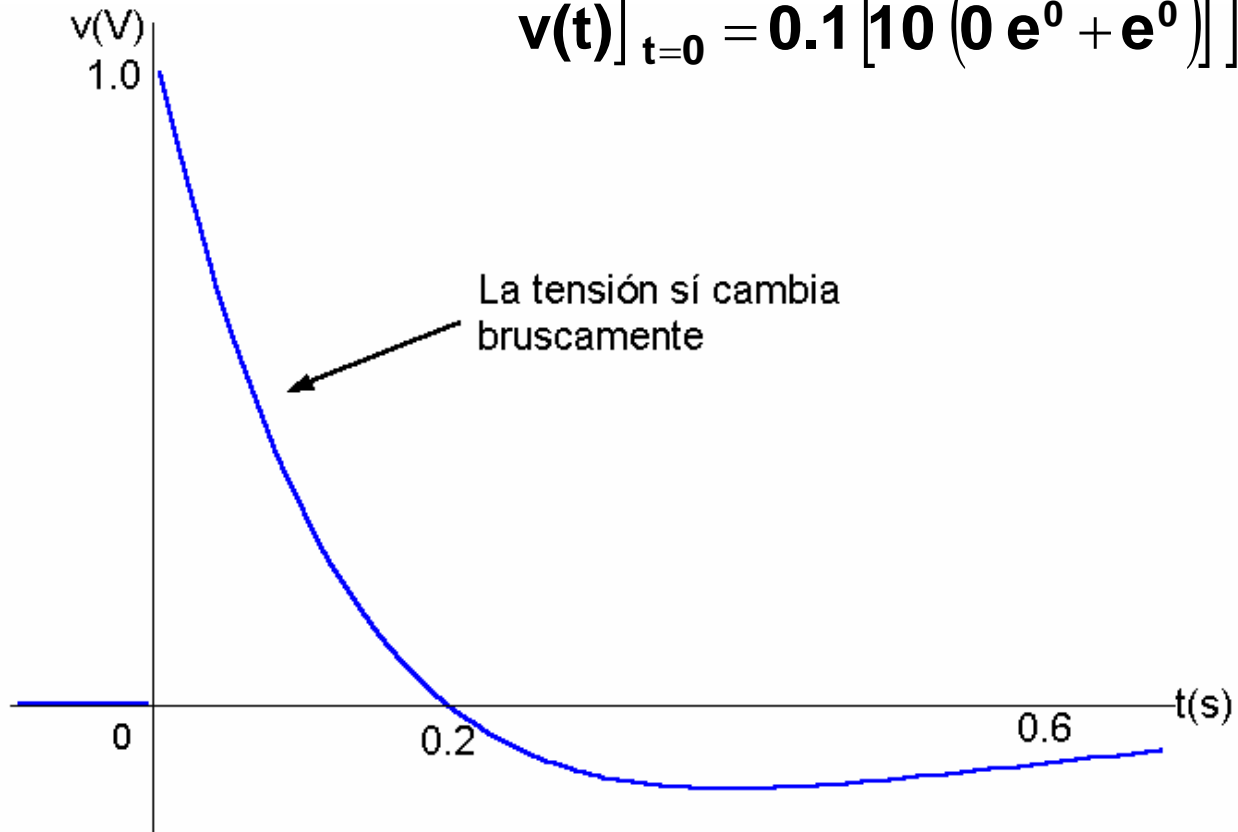




## Ejemplo 2.2 (I)

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = 0.1 \left[ 10 \left( -5t e^{-5t} + e^{-5t} \right) \right] = e^{-5t} (1 - 5t)$$

$$v(t) \Big|_{t=0} = 0.1 \left[ 10 \left( 0 e^0 + e^0 \right) \right] = 1$$



# La bobina

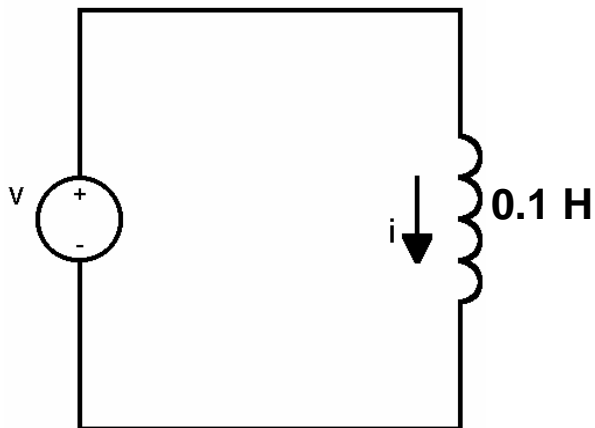
Corriente en función de la tensión

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}; \quad v(t)dt = L di(t); \quad di(t) = \frac{1}{L} v(t)dt$$

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} dx = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(y)dy \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(y)dy + i(t_0)$$

$$\text{Típicamente } t_0=0: \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(y)dy + i(0)$$

## Ejemplo 2.3

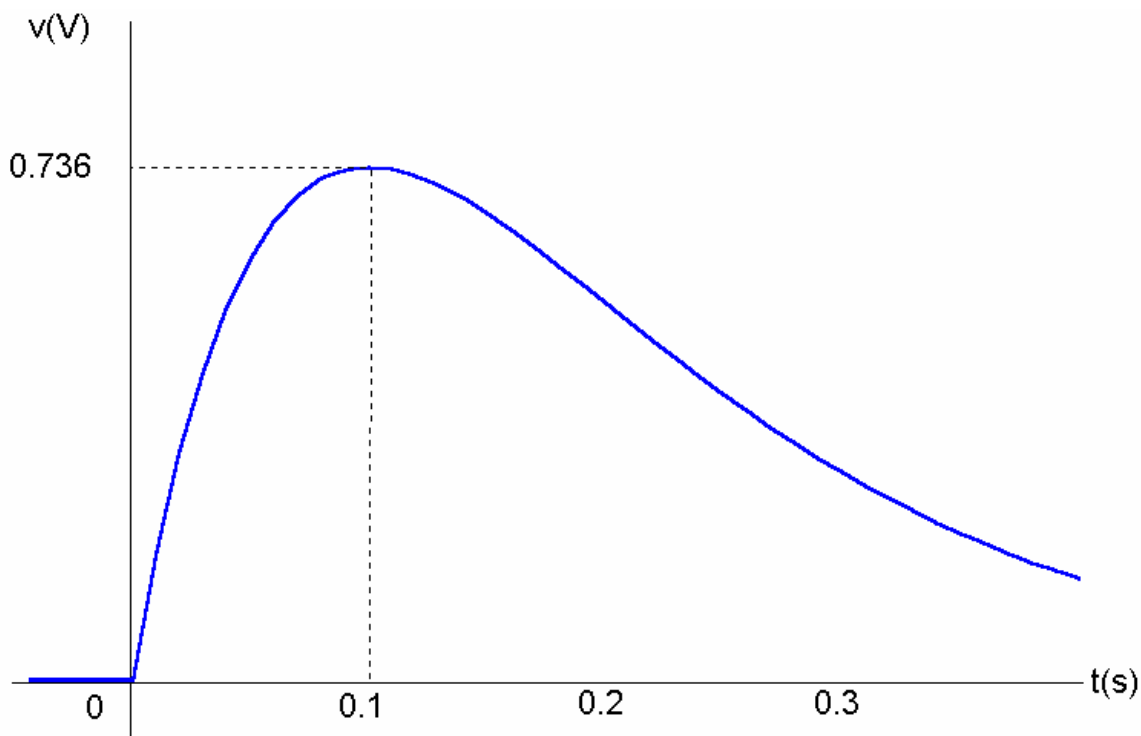


$$\begin{cases} v(t) = 0, & t < 0 \\ v(t) = 20 t e^{-10t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

¡MATLAB!

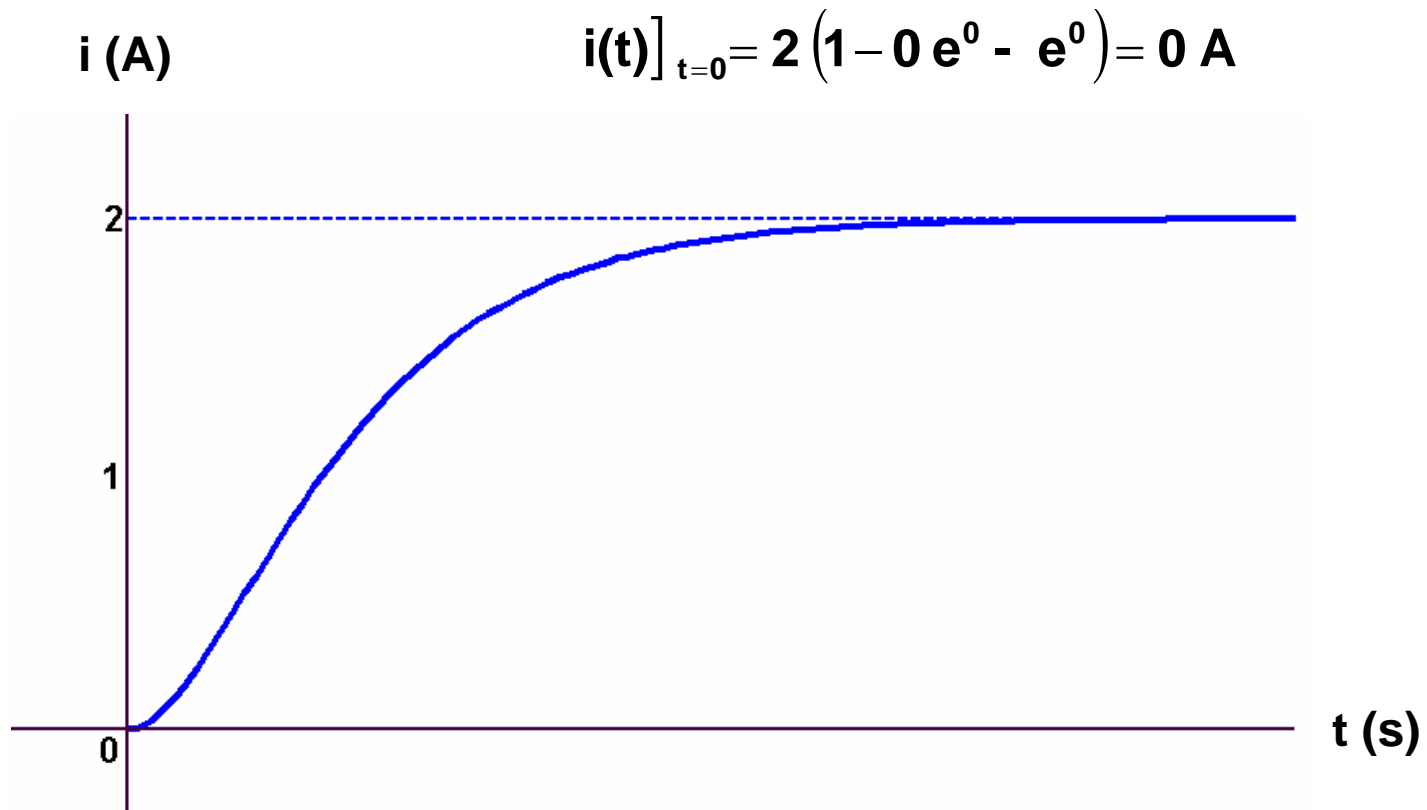
¡EXCEL!

¡PSPICE!



## Ejemplo 2.3 (I)

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(y) dy + i(0) = 200 \left[ \frac{-e^{-10y}}{100} (10y + 1) \right] \Bigg|_0^t = 2 \left( 1 - 10t e^{-10t} - e^{-10t} \right) \text{A}, t > 0$$



# La bobina

## Potencia y energía

$$p(t) = v(t)i(t)$$

$$p(t) = L \frac{di(t)}{dt} i(t)$$

también

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt}$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = Li(t) \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow dw(t) = Li(t)di(t)$$

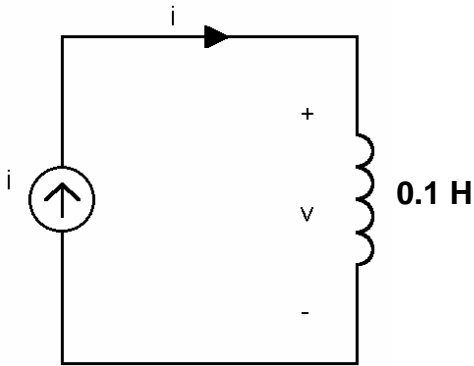
$$\int_{w_0}^w dx = L \int_{i_0}^i y dy; \quad W(t) - W_0 = \frac{1}{2} Li^2(t) \Big|_0$$

$$W(t) = \frac{1}{2} L(i^2(t) - i_0^2) + W_0$$

$$\text{Si } t = 0, i_0 = 0, w_0 = 0$$

$$w = \frac{1}{2} Li^2$$

## Ejemplo 2.4



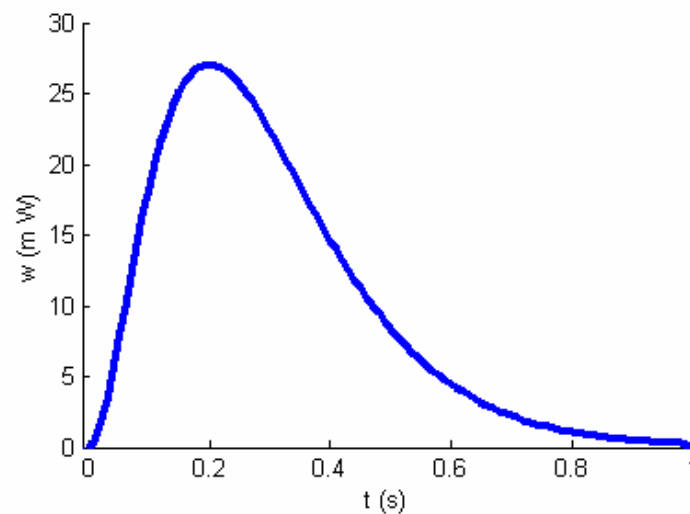
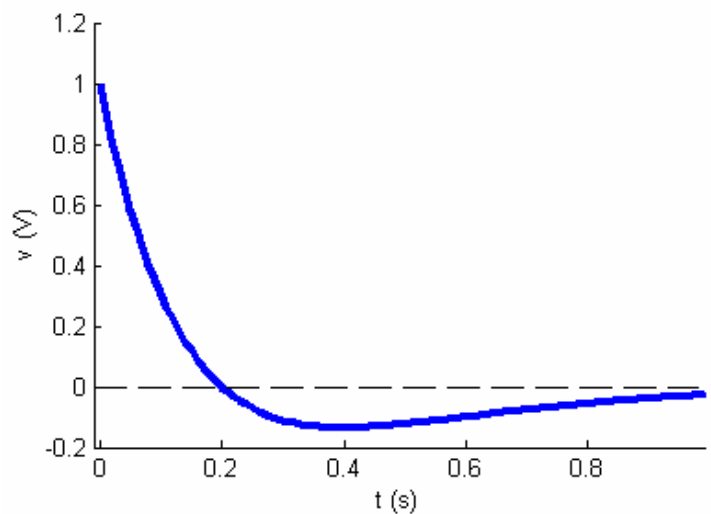
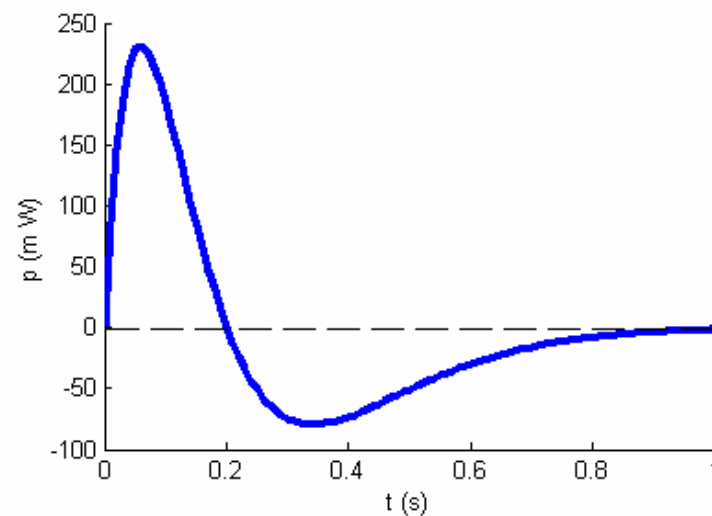
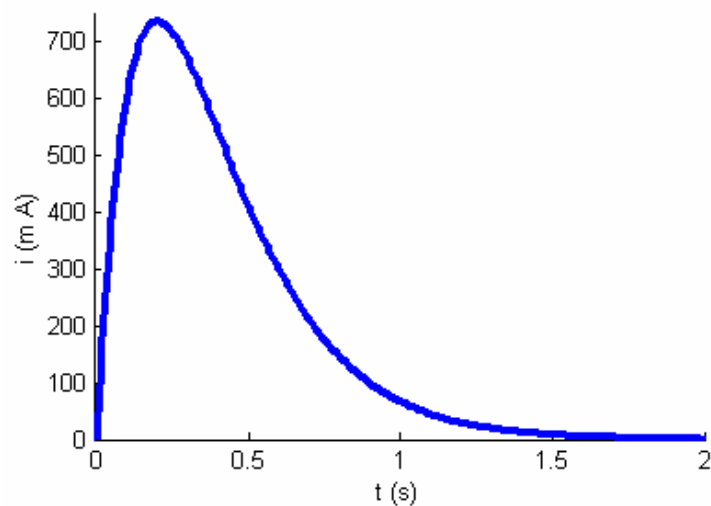
$$\begin{cases} i(t) = 0, & t < 0 \\ i(t) = 10 t e^{-5t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = 0.1 \left[ 10 \left( -5t e^{-5t} + e^{-5t} \right) \right] = -5t e^{-5t} + e^{-5t} \quad [\text{V}]$$

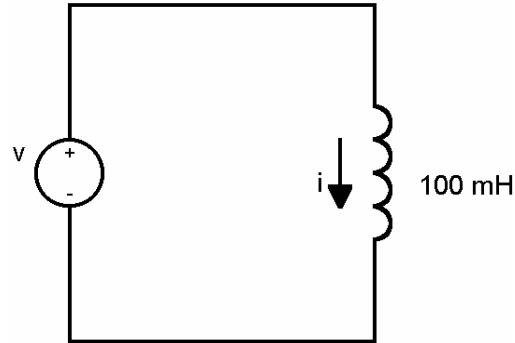
$$p(t) = v(t) \times i(t) = 10t e^{-5t} \left( -5t e^{-5t} + e^{-5t} \right) = -50t^2 e^{-10t} + 10t e^{-10t} \quad [\text{W}]$$

$$w(t) = \frac{1}{2} \times L \times i^2(t) = \frac{1}{2} \times 0.1 \times \left( 10t e^{-5t} \right)^2 = 5t^2 e^{-10t} \quad [\text{J}]$$

# Ejemplo 2.4 (I)



## Ejemplo 2.5



$$\begin{cases} v(t) = 0, & t < 0 \\ v(t) = 20 t e^{-10t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

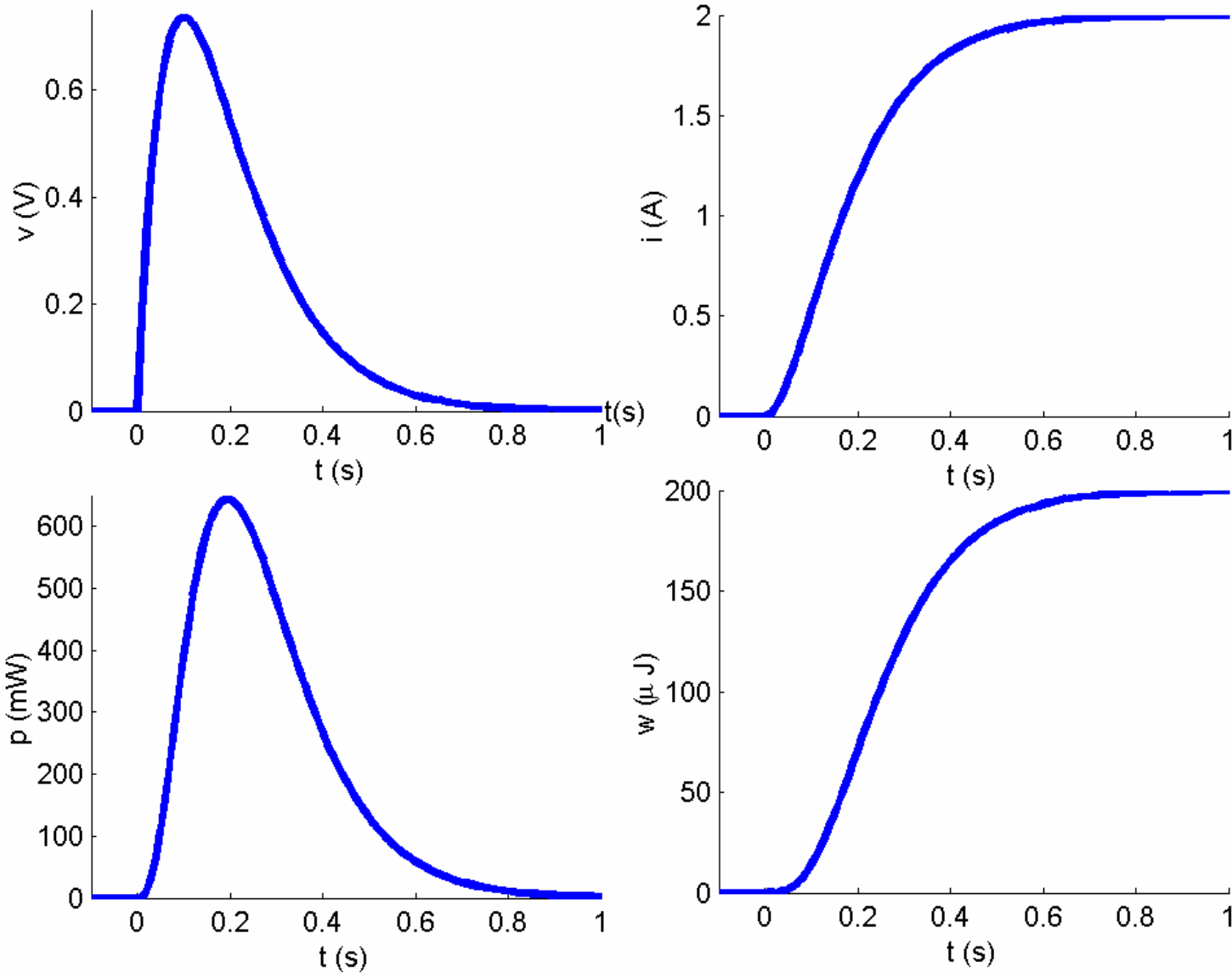
$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(y) dy + i(0) = 2 \left( 1 - 10 t e^{-10t} - e^{-10t} \right) [\text{A}]$$

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t) \times i(t) = 20t e^{-10t} \times 2 \left( 1 - 10t e^{-10t} + e^{-10t} \right) \\ &= 40t e^{-10t} - 400t^2 e^{-20t} + 40t e^{-20t} [\text{W}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{2} \times L \times i^2(t) = \frac{1}{2} \times 0.1 \times 4 \left( 1 - 10t e^{-10t} - e^{-10t} \right)^2 \\ &= 0.2 \left( 1 - 10t e^{-10t} - e^{-10t} \right)^2 [\text{J}] \end{aligned}$$

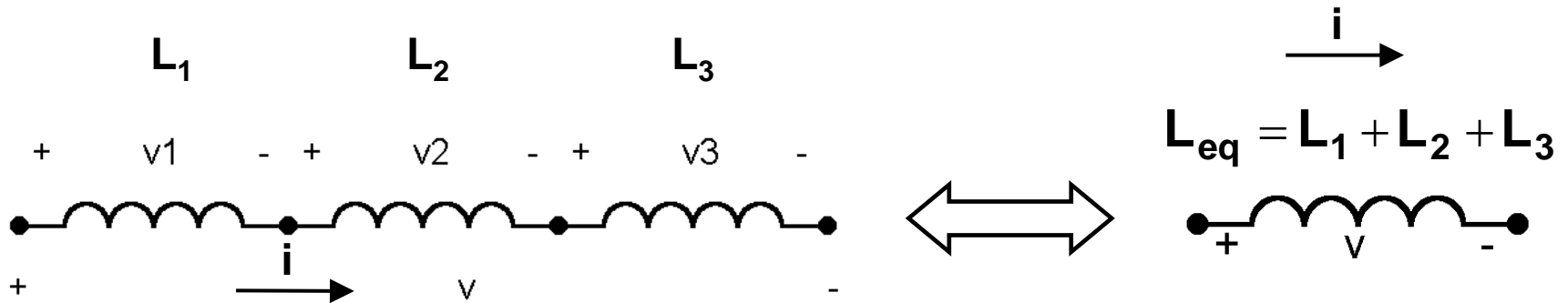


## Ejemplo 2.5 (I)



# Asociación de bobinas

## Serie



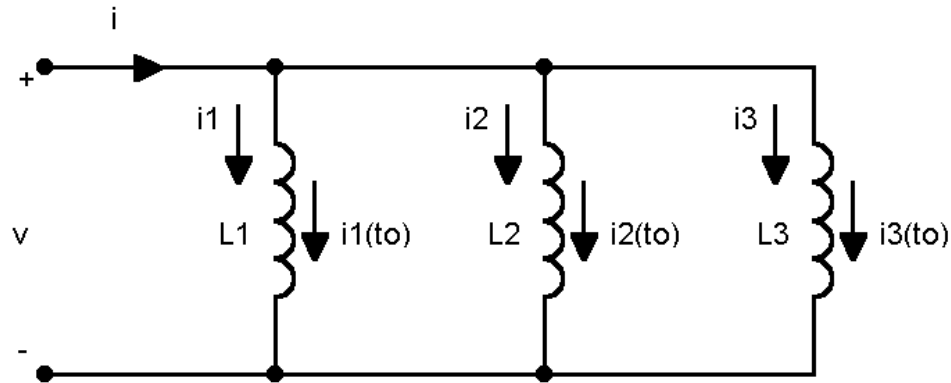
$$v_1(t) = L_1 \frac{di(t)}{dt}, \quad v_2(t) = L_2 \frac{di(t)}{dt}, \quad v_3 = L_3 \frac{di(t)}{dt}$$

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = \underbrace{(L_1 + L_2 + L_3)}_{L_{eq}} \frac{di(t)}{dt}$$

$$v(t) = L_{eq} \frac{di(t)}{dt} \quad L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

# Asociación de bobinas

## Paralelo



$$i_1(t) = \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^t v(x) dx + i_1(t_0)$$

$$i_2(t) = \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^t v(x) dx + i_2(t_0)$$

$$i_3(t) = \frac{1}{L_3} \int_{t_0}^t v(x) dx + i_3(t_0)$$

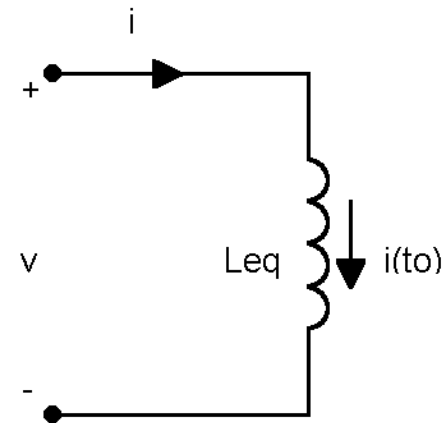
# Asociación de bobinas

## Paralelo

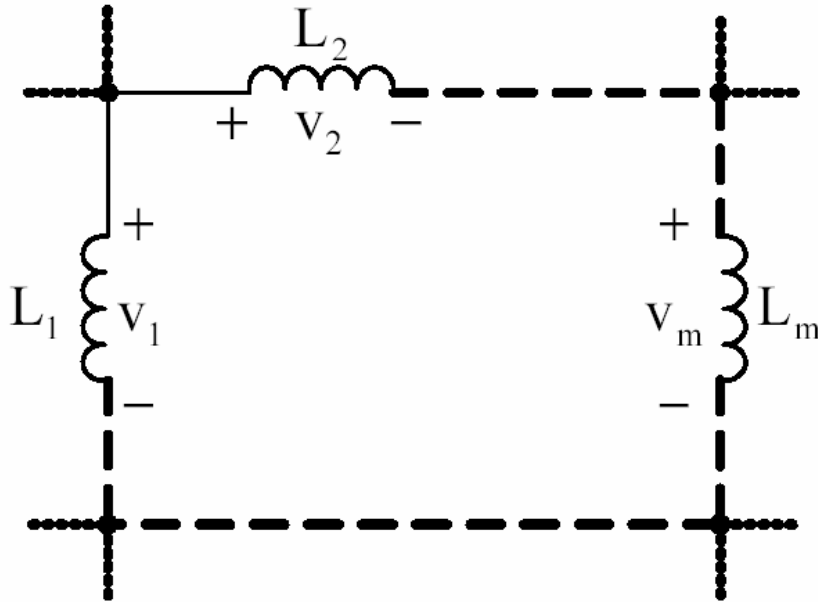
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = \underbrace{\left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right)}_{\frac{1}{L_{eq}}} \int_{t_0}^t v(x) dx + \underbrace{i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0)}_{i(t_0)}$$

$$i(t) = \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^t v(x) dx + i(t_0)$$

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$$



# Conservación del flujo



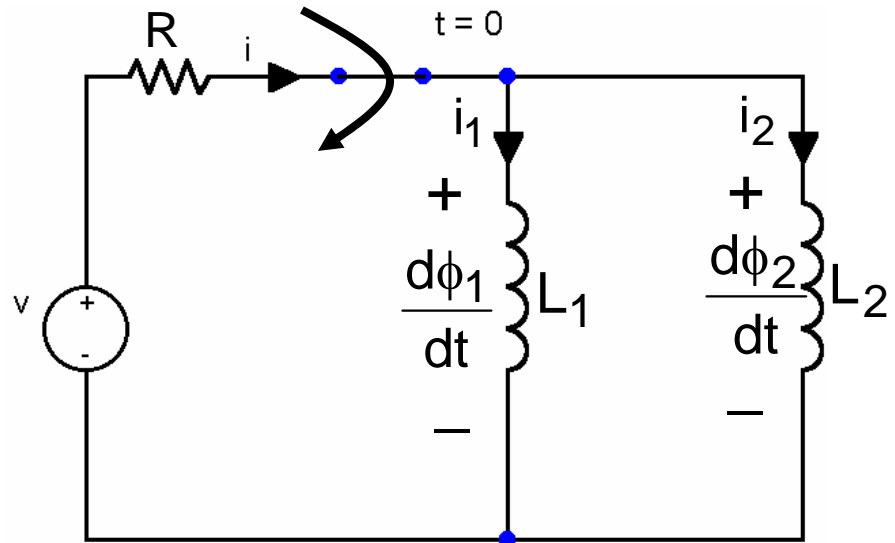
LKT:

$$\sum_{k \in \text{camino cerrado}} v_k = 0 \Rightarrow \sum_{k \in \text{camino cerrado}} \frac{d\Phi_k}{dt} = 0$$

$$\sum_{k \in \text{camino cerrado}} \Phi_k(t) = \Phi_T(t) = \Phi_T(0) \Rightarrow$$

$$\sum_{k \in \text{camino cerrado}} L_k i_k = \Phi_T(0)$$

# Conservación del flujo



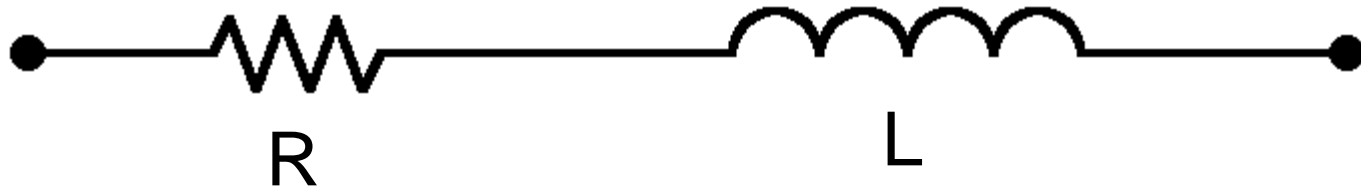
$$i = i_1 + i_2, \quad i = i_1 + \frac{\phi_2}{L_2}$$

$$i = i_1 + \frac{\phi_1}{L_2}, \quad i = i_1 + \frac{\phi_1}{L_2} \frac{L_1}{L_1}$$

$$i = i_1 + i_1 \frac{L_1}{L_2}, \quad i = i_1 \left( 1 + \frac{L_1}{L_2} \right) = i_1 \frac{L_1 + L_2}{L_2}$$

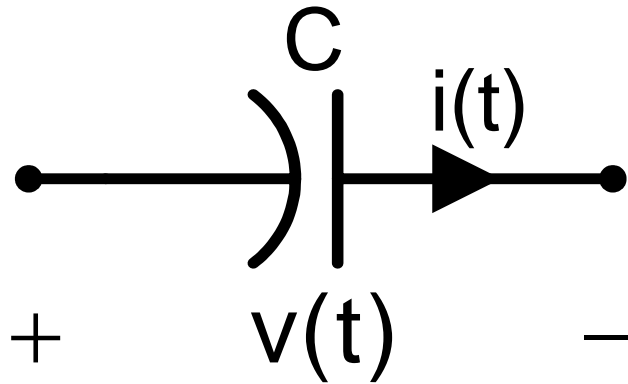
$$i_1 = i \frac{L_2}{L_1 + L_2} \quad \text{y análogamente} \quad i_2 = i \frac{L_1}{L_1 + L_2}$$

# La bobina real



- Resistencia (espiras de la bobina)
- Bobina ideal

# El condensador



$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

- C: capacidad, faradios [ $\mu\text{F}$ ,  $\text{pF}$ ]
- Observaciones:
  - ◆  $v = \text{constante} \Rightarrow i = 0$ . El condensador se comporta como un circuito abierto frente a una tensión constante.



# El condensador

- ◆ La tensión no puede cambiar instantáneamente en bornes de un condensador. Se requeriría una intensidad infinita.

Cambio instantáneo:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \infty \quad \Rightarrow \quad i(t) = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{¡IMPOSIBLE!}$$

# El condensador

## Tensión en función de la corriente

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$i(t)dt = Cdv(t) \Rightarrow dv(t) = \frac{1}{C}i(t)dt$$

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dx = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(y)dy \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(y)dy + v(t_0)$$

$$\text{Para } t_0=0, \text{ se tiene que: } v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(y)dy + v(0)$$

# El condensador

## Potencia y energía

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t)C \frac{dv(t)}{dt}$$

y también

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt}$$

por tanto

$$\frac{dw(t)}{dt} = Cv(t) \frac{dv(t)}{dt}$$

$$dw(t) = Cv(t)dv(t)$$

Integrando

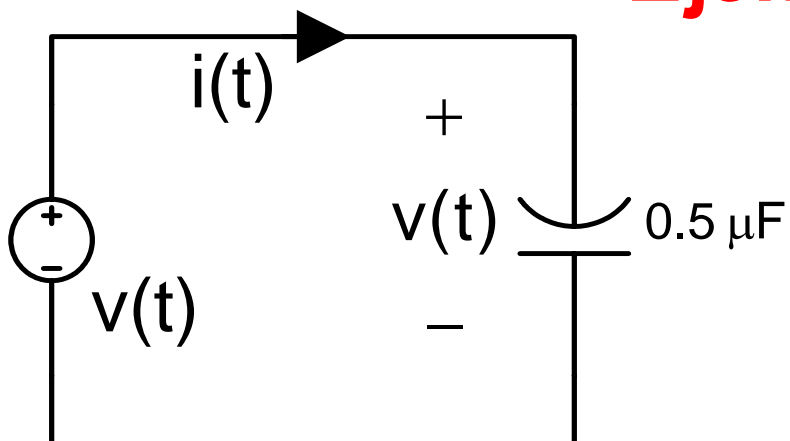
$$\int_{w_0}^w dx = C \int_{v_0}^v y dy;$$

$$W(t) = \frac{C}{2} [v^2(t) - v_0^2] + W_0$$

Si  $t = 0, v_0 = 0, w_0 = 0$

$$W(t) = \frac{1}{2} Cv^2(t)$$

## Ejemplo 2.6



$$\begin{cases} v(t) = 0 \text{ V}, & t \leq 0 \\ v(t) = 4t \text{ V}, & 0 \leq t \leq 1 \\ v(t) = 4e^{-(t-1)} \text{ V}, & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} i(t) = 0 \mu\text{A}, & t \leq 0 \\ i(t) = 2 \mu\text{A}, & 0 \leq t \leq 1 \\ i(t) = -2e^{-(t-1)} \mu\text{A}, & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(t) = 0 \mu\text{W}, & t \leq 0 \\ p(t) = 4t \times 2 = 8t \mu\text{W}, & 0 \leq t \leq 1 \\ p(t) = 4e^{-(t-1)}(-2e^{-(t-1)}) = -8e^{-2(t-1)} \mu\text{W}, & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

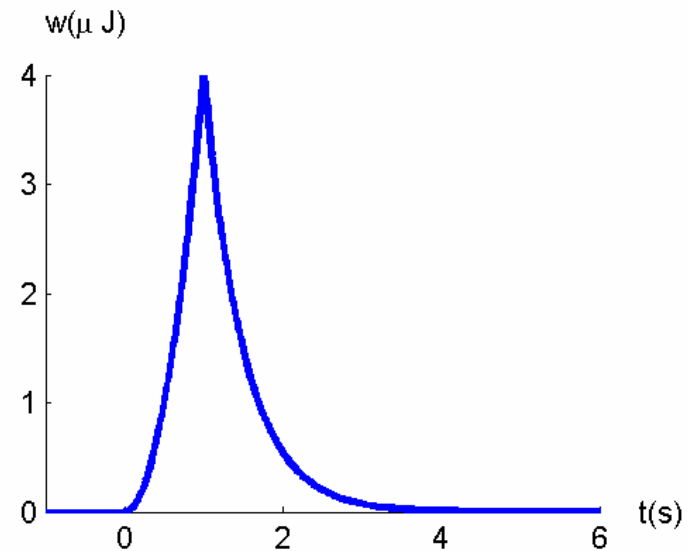
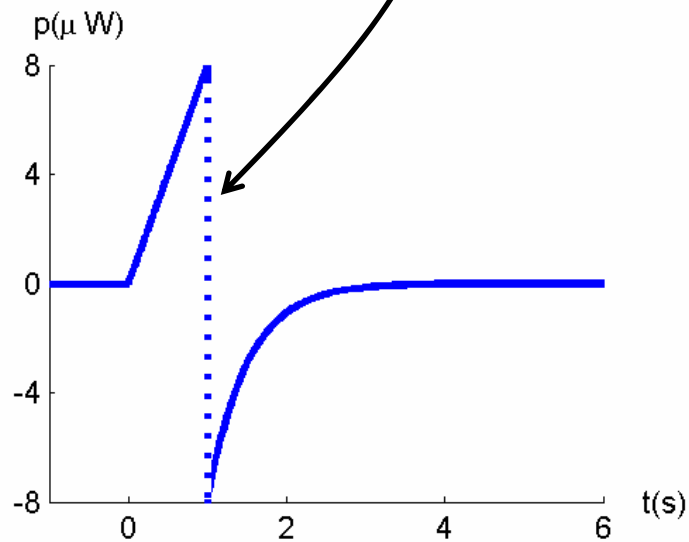
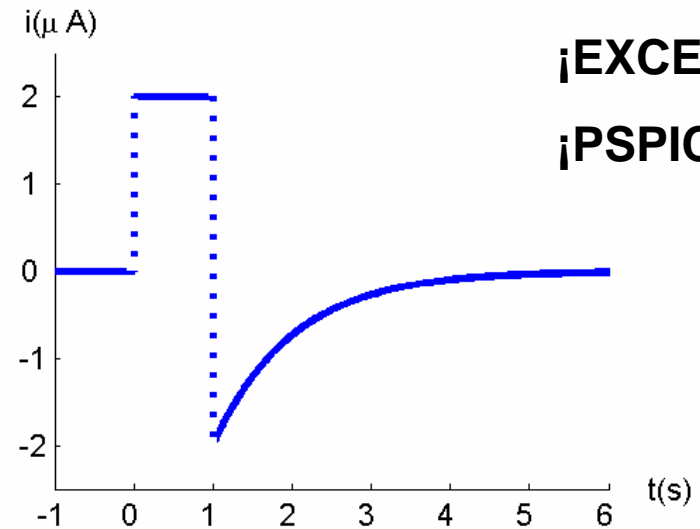
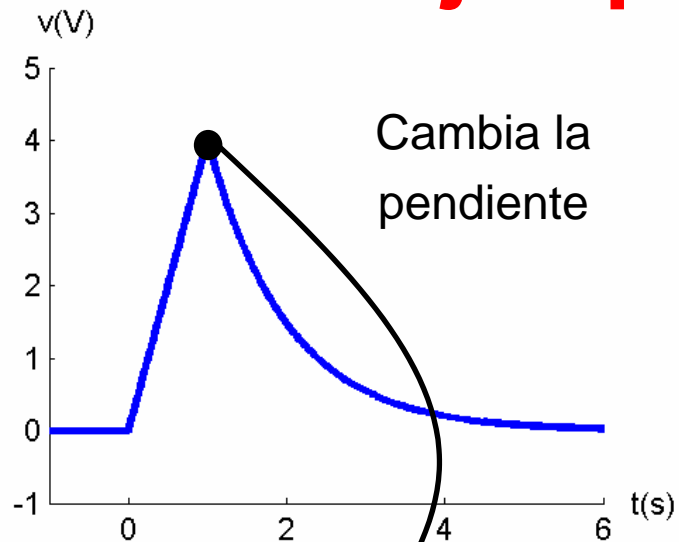
$$\begin{cases} w(t) = 0 \mu\text{J}, & t \leq 0 \\ w(t) = \frac{1}{2} \times 0.5 \times 16t^2 = 4t^2 \mu\text{J}, & 0 \leq t \leq 1 \\ w(t) = \frac{1}{2} \times 0.5 \times 16e^{-2(t-1)} = 4e^{-2(t-1)} \mu\text{J}, & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

# Ejemplo 2.6 (I)

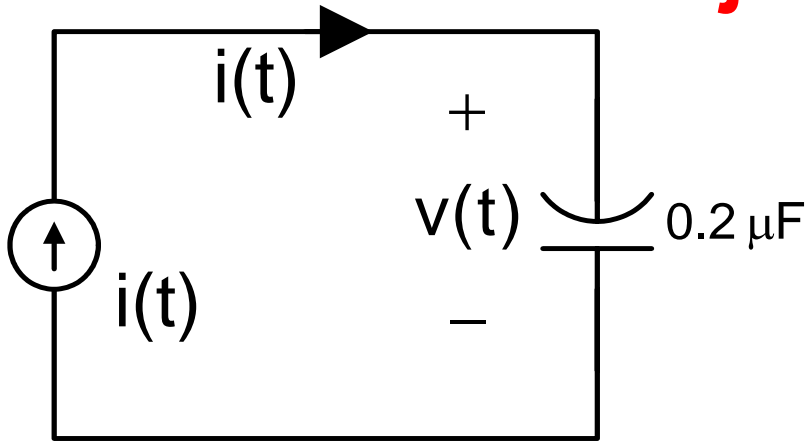
¡MATLAB!

¡EXCEL!

¡PSPICE!



## Ejemplo 2.7

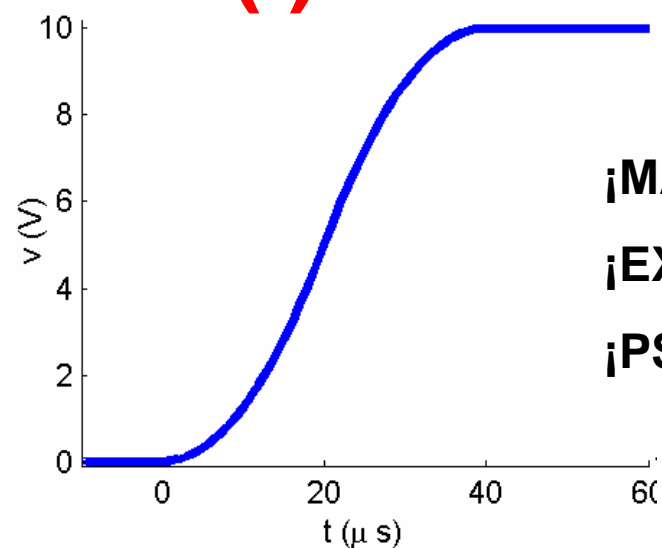
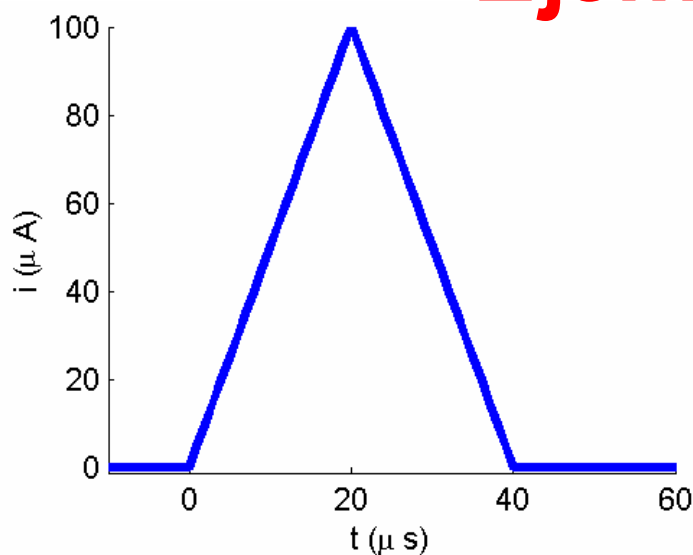


$$\begin{cases} i(t) = 0 \text{ A}, & t \leq 0 \\ i(t) = 5000t \text{ A}, & 0 \leq t \leq 20 \mu\text{s} \\ i(t) = 0.2 - 5000t \text{ A}, & 20 \leq t \leq 40 \mu\text{s} \\ i(t) = 0 \text{ A}, & t \geq 40 \mu\text{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(t) = 0 \text{ V}, & t \leq 0 \\ v(t) = \frac{10^6}{0.2} \int_0^t 5000\tau \delta\tau + 0 = 12.5 \times 10^9 t^2 \text{ V}, & 0 \leq t \leq 20 \mu\text{s} \\ v(t) = (10^6 t - 12.5 \times 10^9 t^2 - 10) \text{ V}, & 20 \leq t \leq 40 \mu\text{s} \\ v(t) = 10 \text{ V}, & t \geq 40 \mu\text{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(t) = 0 \text{ W}, & t \leq 0 \\ p(t) = 62.5 \times 10^{12} t^3 \text{ W}, & 0 \leq t \leq 20 \mu\text{s} \\ p(t) = (62.5 \times 10^{12} t^3 - 7.5 \times 10^9 t^2 + 2.5 \times 10^5 t - 2) \text{ W}, & 20 \leq t \leq 40 \mu\text{s} \\ p(t) = 0 \text{ W}, & t \geq 40 \mu\text{s} \end{cases}$$

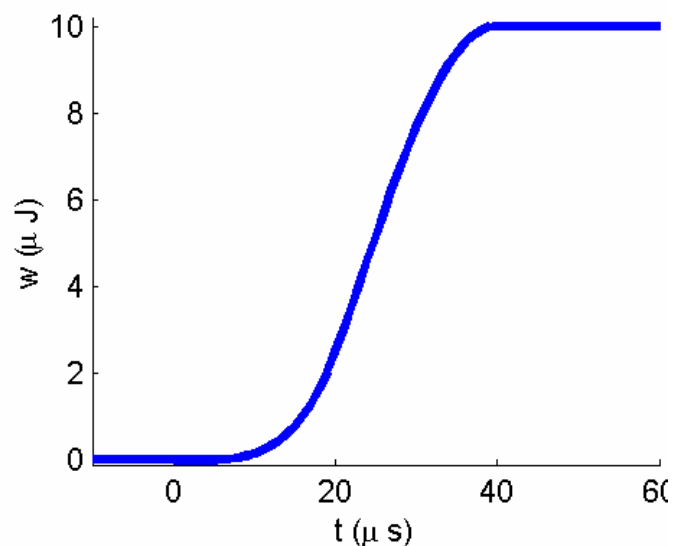
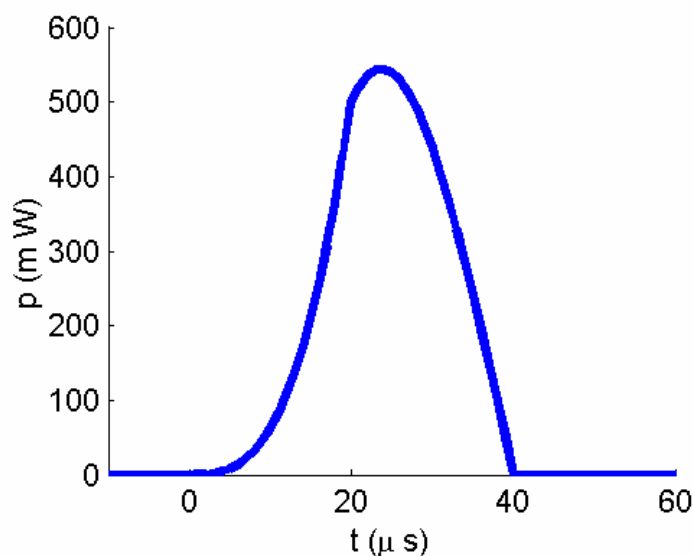
# Ejemplo 2.7 (I)



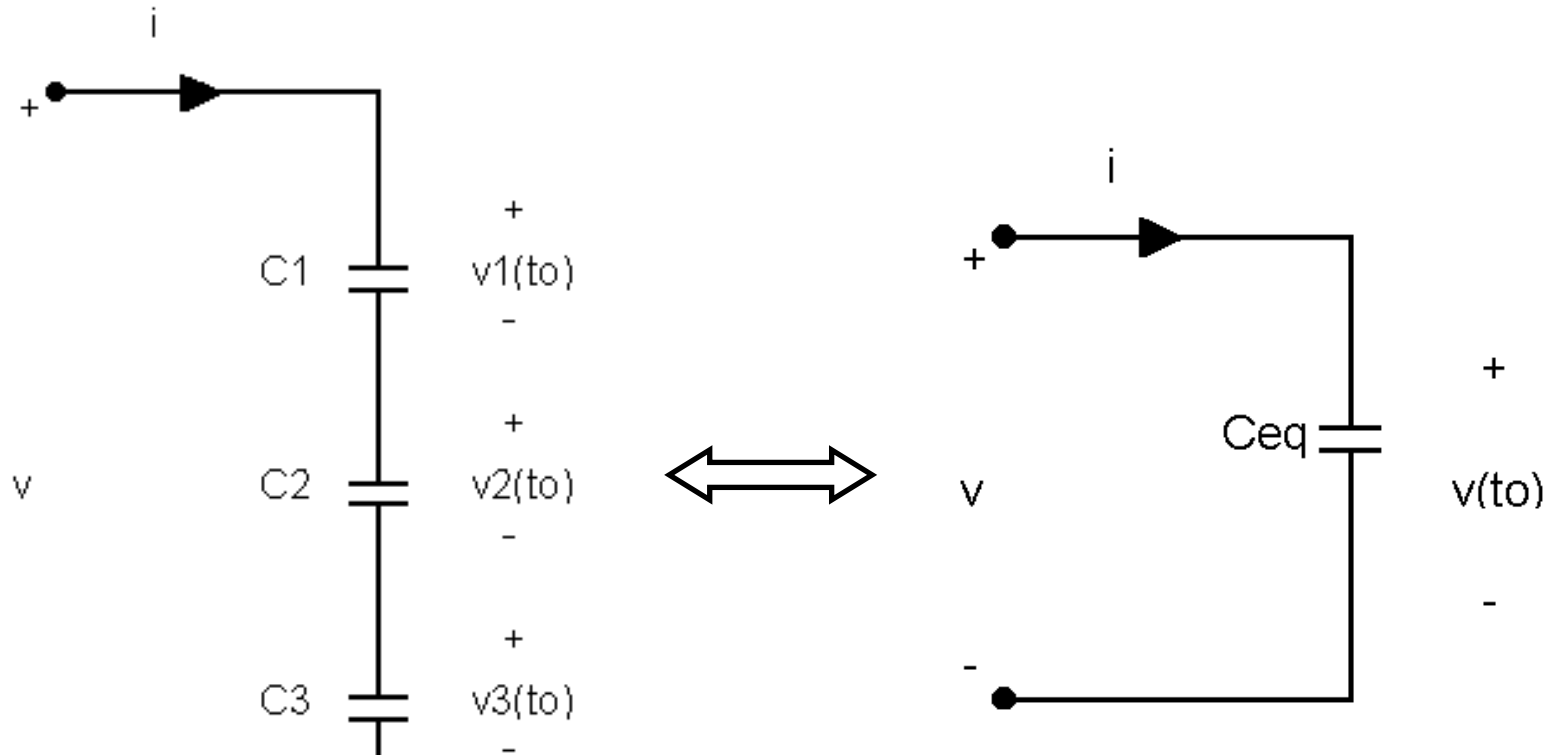
¡MATLAB!

¡EXCEL!

¡PSPICE!



# Asociación de condensadores Serie



$$V(t_0) = V_1(t_0) + V_2(t_0) + V_3(t_0)$$



# Asociación de condensadores

## Serie

$$v_1(t) = \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^t i(x) dx + v_1(t_0)$$

$$v_2(t) = \frac{1}{C_2} \int_{t_0}^t i(x) dx + v_2(t_0)$$

$$v_3(t) = \frac{1}{C_3} \int_{t_0}^t i(x) dx + v_3(t_0)$$

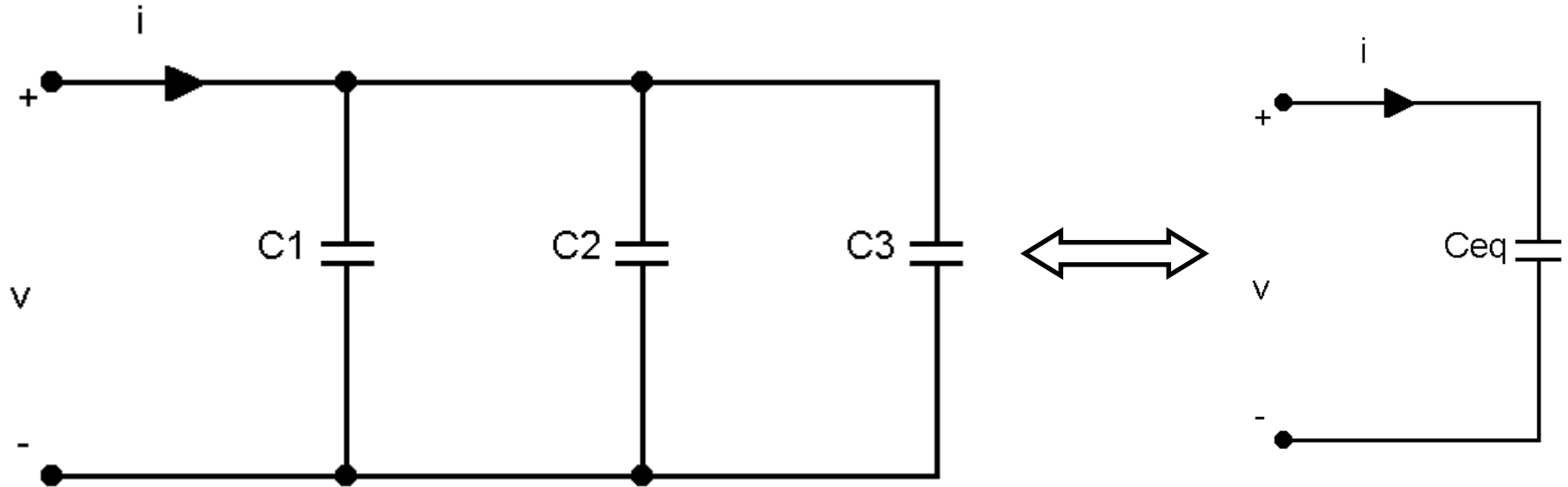
$$v = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = \underbrace{\left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)}_{\frac{1}{C_{eq}}} \int_{t_0}^t i(x) dx + \underbrace{v_1(t_0) + v_2(t_0) + v_3(t_0)}_{v(t_0)}$$

$$v(t) = \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^t i(x) dx + v(t_0)$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

# Asociación de condensadores

## Paralelo



$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0)$$

# Asociación de condensadores

## Paralelo

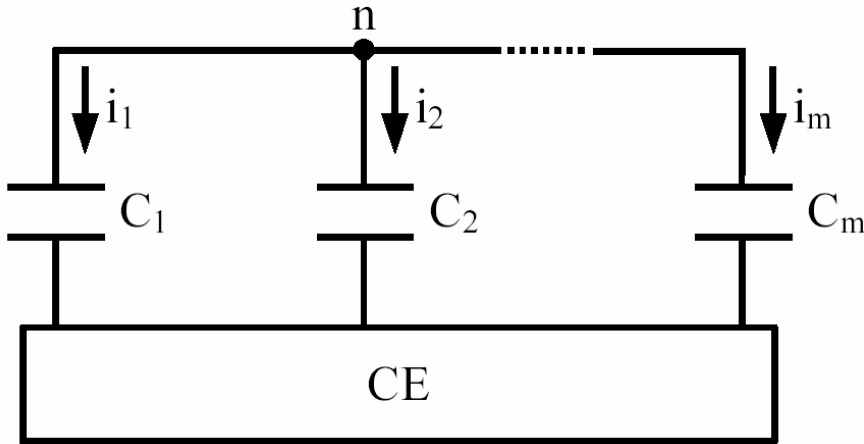
$$i_1(t) = C_1 \frac{dv(t)}{dt}, \quad i_2(t) = C_2 \frac{dv(t)}{dt}, \quad i_3(t) = C_3 \frac{dv(t)}{dt}$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = \underbrace{(C_1 + C_2 + C_3)}_{C_{eq}} \frac{dv(t)}{dt}$$

$$i(t) = C_{eq} \frac{dv(t)}{dt}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

# Conservación de la carga



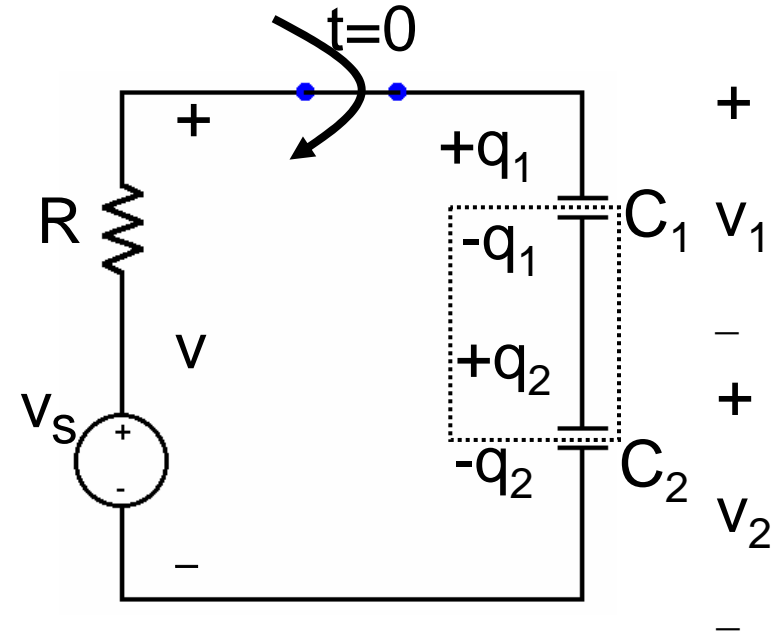
LKC :

$$\sum_{k=1}^m i_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^m \frac{dq_k}{dt} = 0$$

$$\sum_{k=1}^m q_k(t) = q_T(t) = q_T(0) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^m C_k v_k = q_T(0)$$

# Conservación de la carga



$$v = v_1 + v_2, \quad v = v_1 + \frac{q_2}{C_2}$$

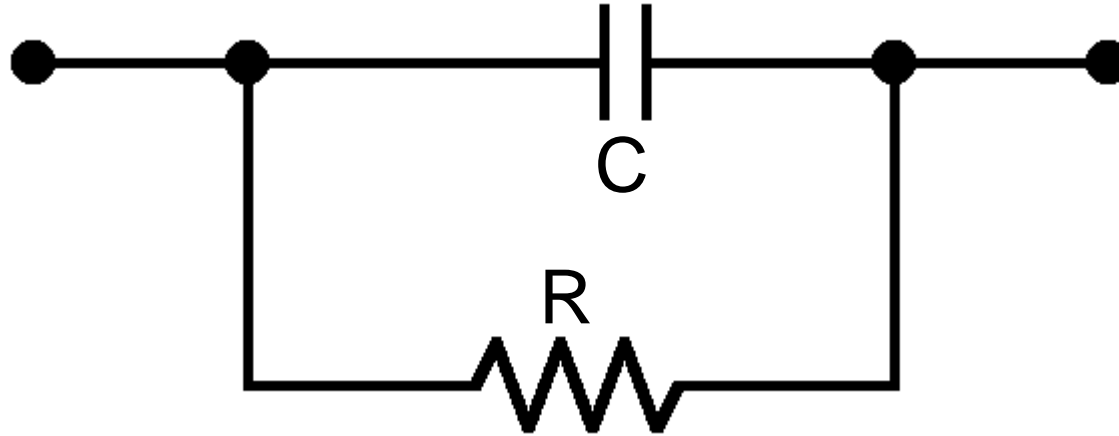
$$v = v_1 + \frac{q_1}{C_2}, \quad v = v_1 + \frac{q_1}{C_2} \frac{C_1}{C_1}$$

$$v = v_1 + v_1 \frac{C_1}{C_2}, \quad v = v_1 \left( 1 + \frac{C_1}{C_2} \right) = v_1 \frac{C_2 + C_1}{C_2}$$

$$v_1 = v \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad \text{y análogamente} \quad v_2 = v \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

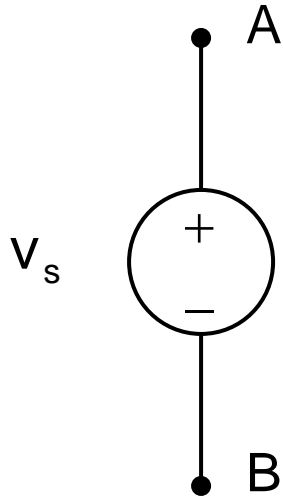
# El condensador

## Condensador real

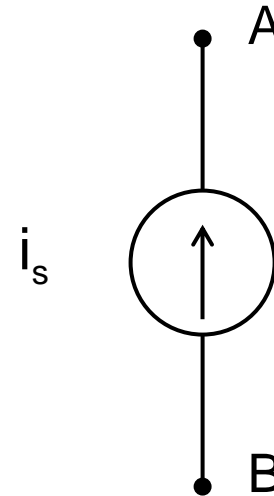


- Resistencia grande (corrientes de fuga en aislamiento)
- Condensador ideal

# Fuente ideal de tensión y corriente

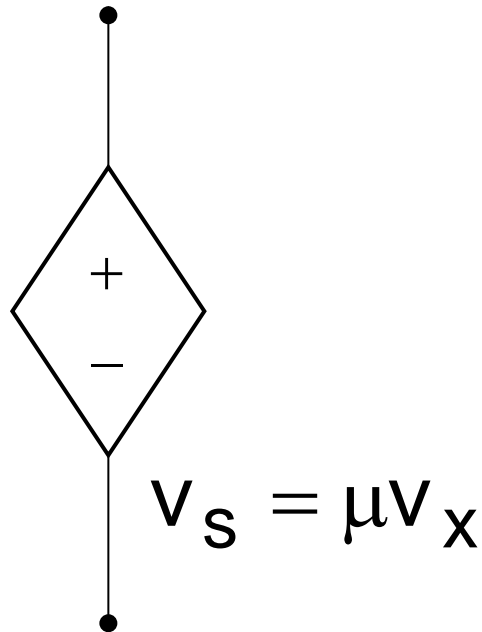


**$V_s$  se mantiene constante independientemente de la corriente BA**

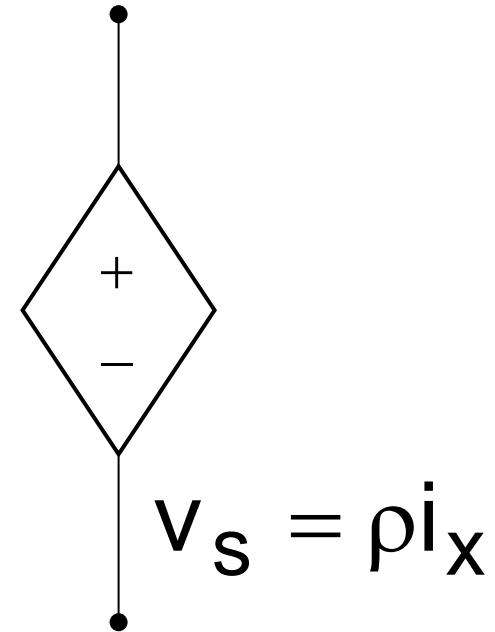


**$i_s$  se mantiene constante independientemente de la tensión AB**

# Fuente de tensión dependiente



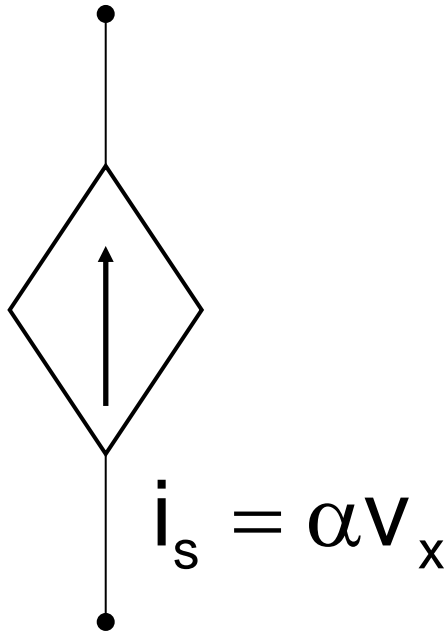
La tensión de la fuente  $v_s$  depende de una tensión de control  $v_x$



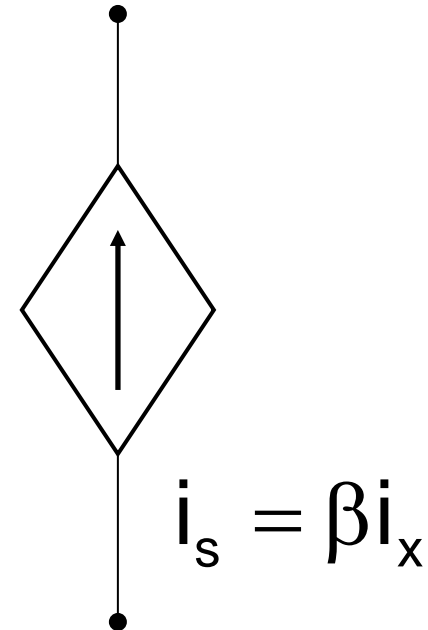
La tensión de la fuente  $v_s$  depende de una corriente de control  $i_x$



# Fuente de corriente dependiente

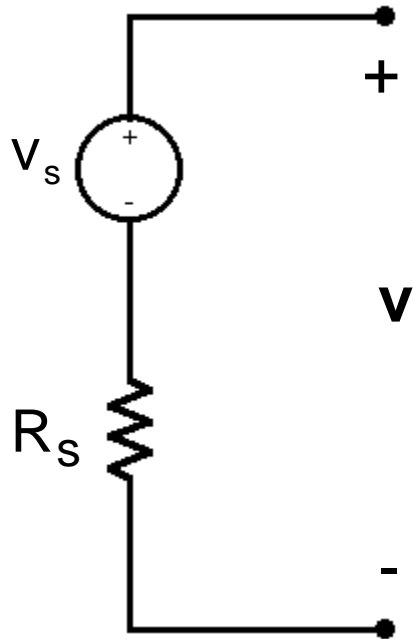


La corriente de la fuente  $i_s$  depende de una tensión de control  $v_x$



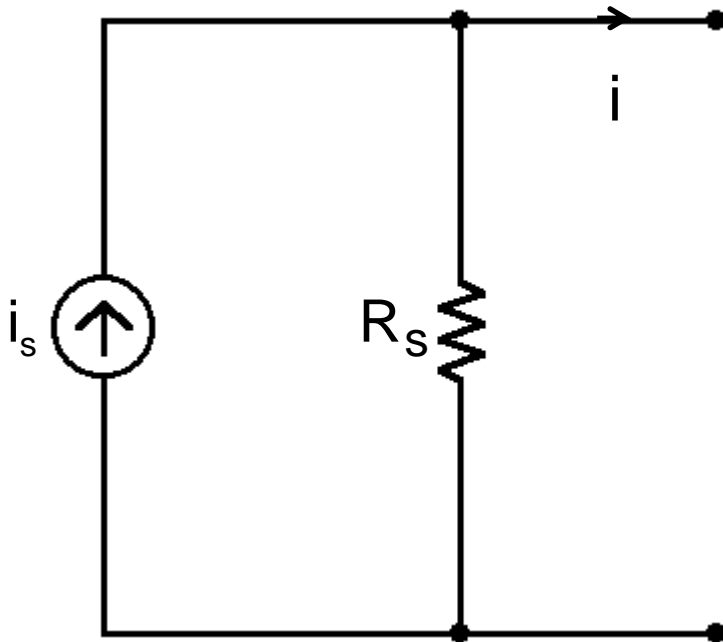
La corriente de la fuente  $i_s$  depende de una corriente de control  $i_x$

# Fuente real de tensión



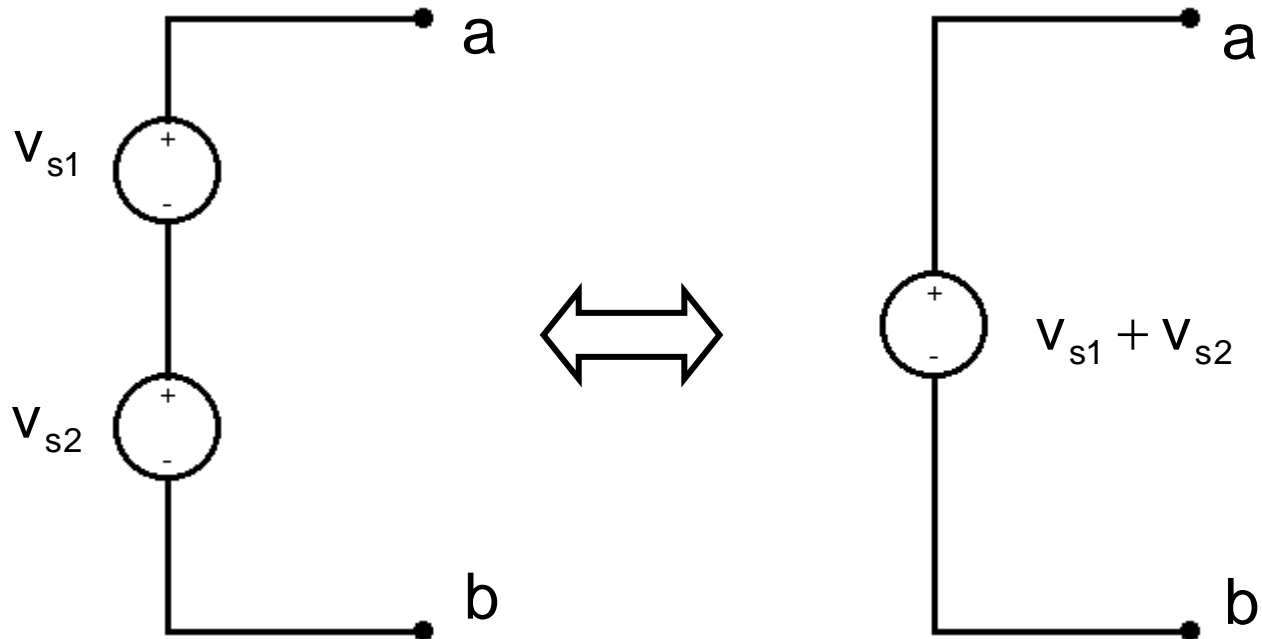
- La tensión se mantiene en bornes de la fuente ideal, pero no en bornes de la fuente real
- La resistencia es pequeña

# Fuente real de corriente



- La corriente se mantiene en la rama de la fuente ideal, pero no en la salida de la fuente real
- La resistencia es grande

# Asociación de fuentes ideales de tensión



# Asociación de fuentes ideales de corriente

